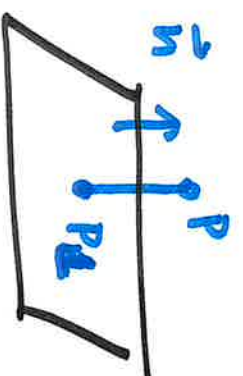


$$d(P, \Sigma) := \min \{ d(P, X) \mid X \in \Sigma \}$$

$$d(P; \Sigma) = 0 \Leftrightarrow P \in \Sigma$$

$\arg \min_{X \in \Sigma} d(P, X) = P_H P_I$ ove P_I è la proiezione
ortogonale di P su Σ .



$$P_I = \Sigma \cap \{P; W^\perp\}$$

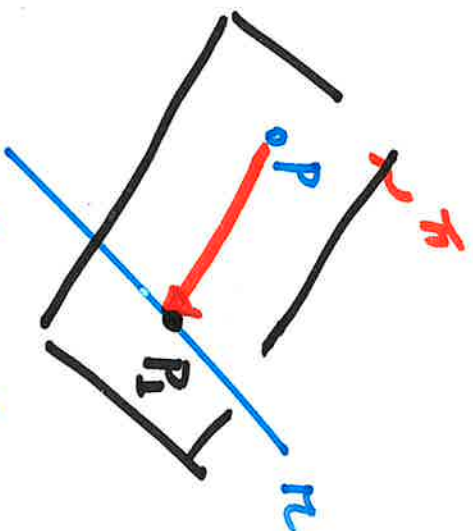
ove $\Sigma = \{Q; W\}$

DISTANZA PUNTO $P = (x'_1 \dots x'_n)$

ipresivo $\Sigma: a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - b = 0$

$$d(P; \Sigma) = \frac{|a_1 x'_1 + \dots + a_n x'_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

$$P = (x_P, y_P, z_P)$$



$$n: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

π = plane passing through $P \perp n$.

$\vec{n}$ = vector normal to the plane

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

$\vec{n}$ = vector normal to the plane

$$|h'c'| (x - x_P) - |a'c'| (y - y_P) + |a'b'| (z - z_P) = 0$$

$$((x - x_P), (y - y_P), (z - z_P)) \cdot [(a, b, c) \times (a', b', c')] = 0$$

$$(a', b', c')$$

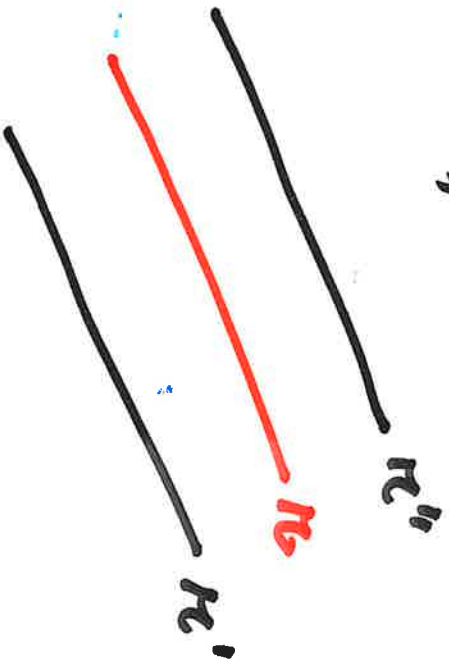
$$(a, b, c) \times (a', b', c') = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} =$$



$$= (|b'c'|, -|a'c'|, |a'b'|)$$

$n \geq 2$

Luogo dei punti a distanza d da una
retta r fissata.



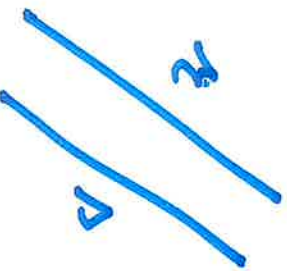
2 rette parallele ad r

$$r: ax + by + c = 0$$

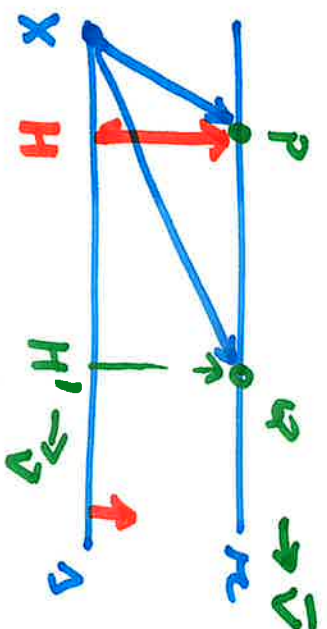
$$|ax + by + c| = d \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

più in generale in dim n il luogo dei punti a distanza
fissa d da un iperpiano sono 2 iperpiani paralleli.

Siano r, Δ paralleli



$\Rightarrow$ ogni punto di r
è alla medesima
distanza da Δ .



Siano $P, Q \in r$
 $d(P, r) =$

$$= \|\vec{PH}\| \text{ ove}$$

$$\vec{PH} = \frac{\vec{PX} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$$

$$QX \cdot \vec{n} =$$

$$= Q(\vec{QP} + \vec{PX}) \cdot \vec{n} =$$

$$= Q\vec{P} \cdot \vec{n} + \vec{PX} \cdot \vec{n} \quad \text{con } Q\vec{P} \perp \vec{n}$$

$$= \vec{PX} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{PH} = Q\vec{H}$$

$$d(r, \Delta) := \min \{d(P, Q) : P \in r, Q \in \Delta\} = \min \{d(P, \Delta) : P \in r\} =$$

$$= \min \{d(r, \Delta) : Q \in \Delta\}.$$

RAZIONAMENTO ANALOGICO PER SOTTOSPACI PARALLELI.

Se $\Sigma; \pi$ sono due rettoprati disgiunti

$$d(\Sigma; \pi) := \min \{d(P, Q) : P \in \Sigma, Q \in \pi\}.$$

$n=3$

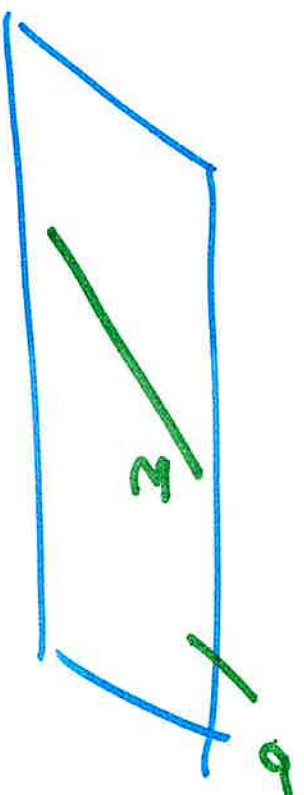
$$\Sigma = [P; u] \quad \pi = [Q; w] \quad \Sigma, \pi \text{ rette sghembe.}$$

$$\dim u = \dim w = 1$$

$$\dim \mathcal{L}(\vec{PQ}) + u + w = 3$$

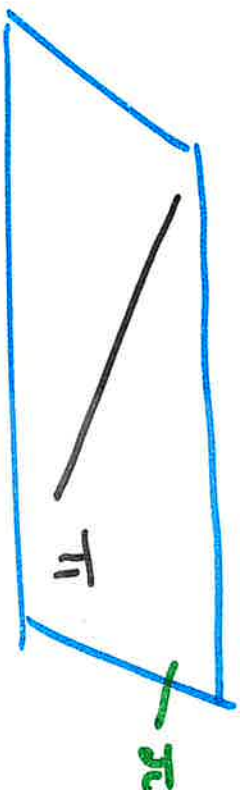
Teorema: Dato $\Sigma \in \pi$ due rette sghembe (in $AG_3(\mathbb{R})$) esiste un'unica retta m che è ortogonale ad entrambe ed interseca entrambe.

Posi: $P \in \Sigma$ e $Q \in \pi$ in modo che
i punti $P \in Q$ sono i punti di $\vec{PQ} \in \pi$
a distanza minima fra loro ed un'è l'è la retta di
minima distanza



$$\Sigma = [P; u]$$

$$\Pi = [Q; w]$$



oss: $\exists$ esattamente 2 piani σ e π con $\sigma // \pi$ ed

$$u \in \sigma; \pi \in \pi.$$

$$\sigma = [P; u \oplus w]$$

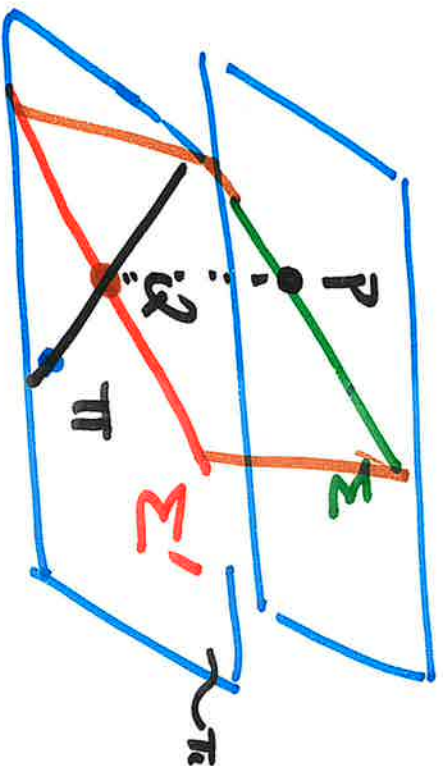
$$\pi = [Q; u \oplus w]$$

N.B.: Se un piano Π ha σ e π che $\sigma // \pi \Rightarrow$ la sua
 equazione è necessariamente determinata ed è $u \oplus w$.

oss: ogni punto di σ è alla stessa distanza da π .

in particolare $\forall X, Y \in \Sigma, d(X, \pi) = d(Y, \pi)$

$\Rightarrow$ possiamo parlare di distanza di Σ dal piano π



così deriviamo la proiezione ortogonale di Σ su π

Prendiamo il piano passante per Σ ortogonale a σ (ovvero ortogonale a π) e lo intersechiamo con π ottenendo una retta Σ'

Oss: $\Sigma' \parallel \Sigma$ in quanto ha direzione: int. diretta di π con direzione di Σ .

$\Rightarrow \Sigma'$ interseca π in un punto Q

In particolare Q avrà proiezione ortogonale di un punto $P \in \Sigma$, ma la retta PQ è

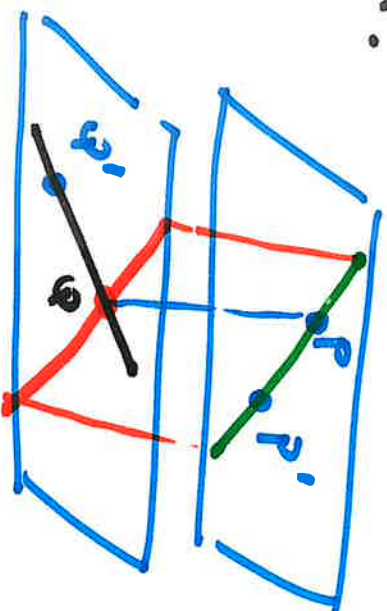
- 1) ortogonale a π e $\sigma \Rightarrow$ ortogonale a π, Σ ,
- 2) incidente π ed incidente Σ
- 3) $\|\vec{PQ}\| = d(\pi, \sigma)$ perché è un vettore che congiunge

P con la sua proiezione ortogonale $\Rightarrow$ è un vettore di lunghezza minima che congiunge i punti di Σ con quelli di π .

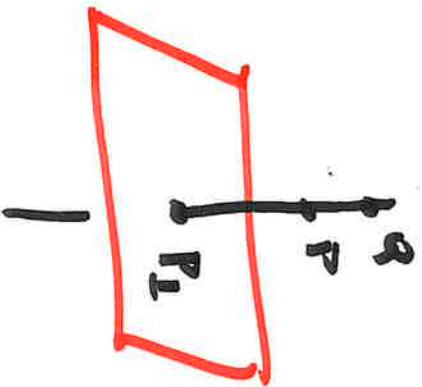
$\vec{PQ'}$ non è ortogonale

a $\pi \circ \sigma \Rightarrow$

$$\|\vec{PQ'}\| > d(\pi, \sigma) = \|\vec{PQ}\|$$



N.B.: La proiezione ortogonale è una funzione
che va $AB_n(\mathbb{R}) \rightarrow \Sigma$ con Σ sottospazio di
 $AB_n(\mathbb{R})$.



In generale manda sottospazi in sottospazi e
si può rappresentare $X' = AX + B$
ma $\det(A) = 0$

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$P_X = (x, y, z).$$

La proiezione di X su π è data dal punto
 (x', y', z')

tale che

$$1) ax' + by' + cz' + d = 0$$

$$2) \vec{XX'} \text{ deve essere } \perp \text{ a } \pi \Rightarrow \vec{XX'} \text{ deve essere proporzionale a } (a, b, c)$$

$$\pi_k \begin{pmatrix} x-x' & y-y' & z-z' \\ a & b & c \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} \frac{x-x'}{a} = \frac{y-y'}{b} = \frac{z-z'}{c} \end{cases}$$

$$ax' + by' + cz' + d = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x' - x}{a} = \frac{y' - y}{b} \\ \frac{x' - x}{a} = \frac{z' - z}{c} \\ ax' + by' + cz' + d = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = bx - ay + az' \\ x' = cx - az' + az' \\ ax' + by' + cz' + d = 0 \end{array} \right.$$

$$bx - ay + az' = cx - az' + az'$$

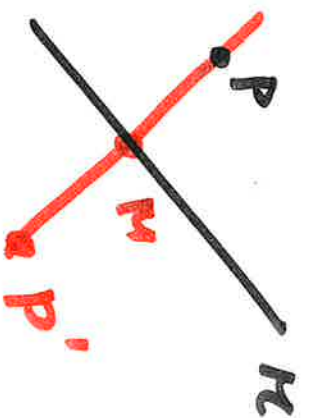
$$\Rightarrow \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}x - y + z = z' - y'$$

$$a(bx - ay + az') + by' + c\left(\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}x - y + z - y'\right) + d = 0$$

$$\begin{array}{l} x' = \\ y' = \text{funzioni di } I \text{ grado in } (x, y, z) \\ z' = \end{array}$$

Riflessione rispetto ad un iperpiano.

$n=2$

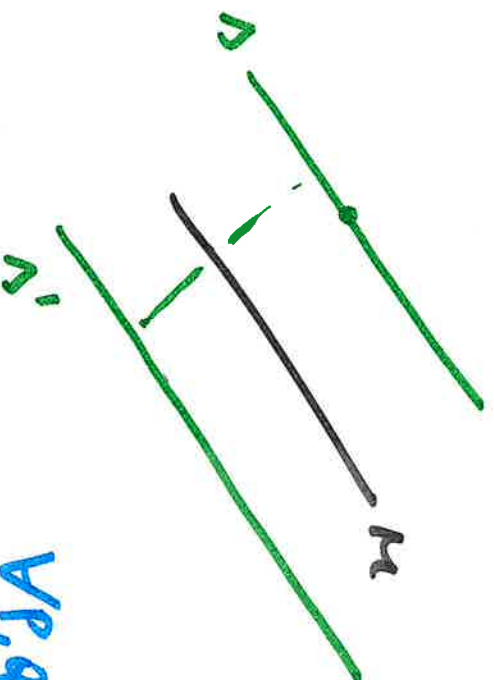


P' immagine di P
rispetto ad H
e $\vec{PM} = \vec{MP}$

con M proiezione

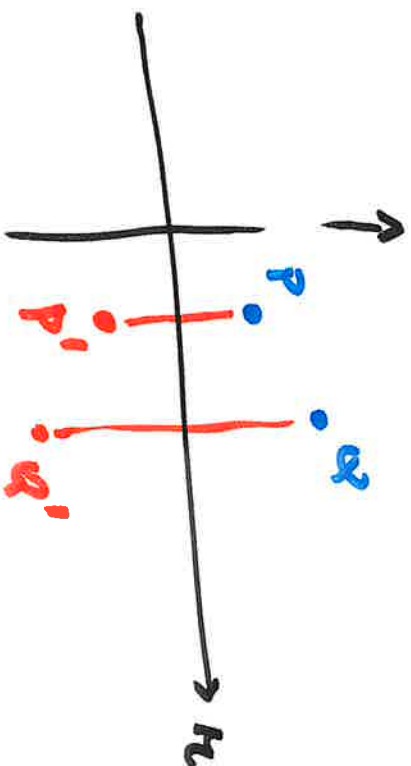
ortogonale di P su H .

$$d(P, H) = \|\vec{PM}\| = \|\vec{MP'}\| = d(P', H)$$



Le riflessioni di asse
sono isometrie
nel senso che dividono
la tale trasformazione

$$\forall P, Q \in AG_n(\mathbb{R}) : d(P, Q) = d(\varphi_n(P), \varphi_n(Q))$$



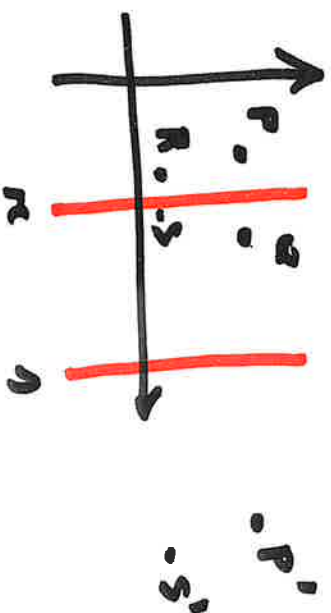
Scogliamo un
rif. euclideo
in cui la retta
ha eq. $y = 0$

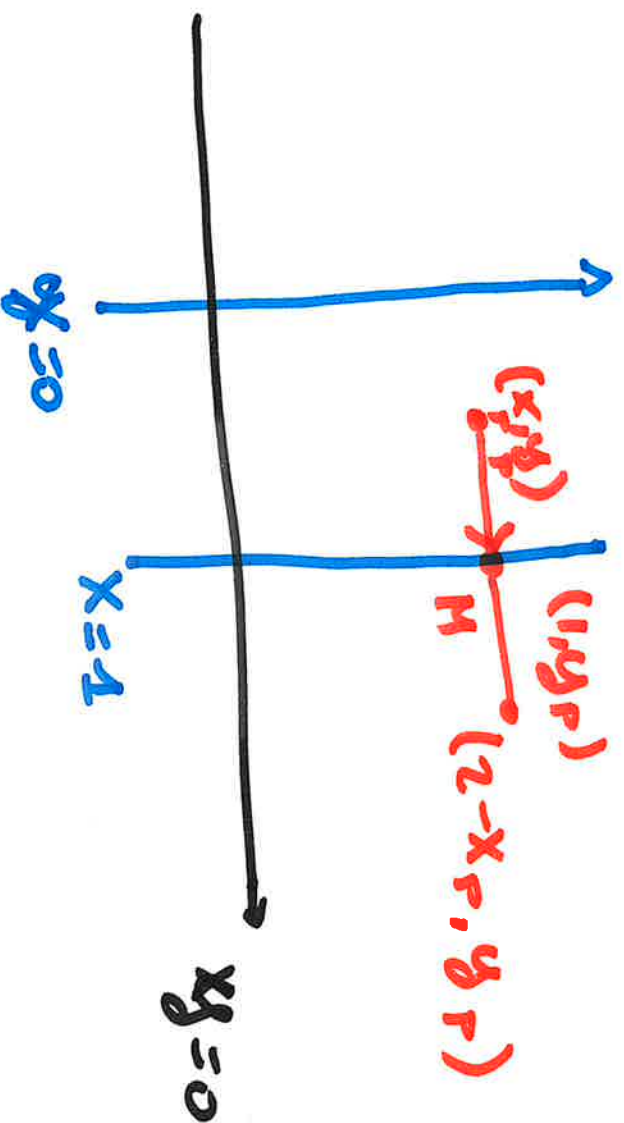
Prendi $P = (x_P, y_P)$ $Q = (x_Q, y_Q)$

$q_x(P) = (x_P, -y_P)$ $q_x(Q) = (x_Q, -y_Q)$

$$d(P, Q)^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 =$$

$$= d(q_x(P), q_x(Q))^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_P - y_Q)^2$$





$$\varphi_{x=0}(x, y) = (-x, y)$$

$$\varphi_{x=1}(x_P, y_P) =$$

$$\stackrel{\text{aff}(x_P)}{=} (2-x_P, y_P)$$

$$[y = y_P] \cap [x = 1]$$

$$(1, y_P)$$

$$(x_P, y_P) + [(1, y_P) - (x_P, y_P)] \cdot 2$$

$$= (x_P, y_P) + (2 - 2x_P) = (2 - x_P, y_P)$$

$$(x, y) \rightarrow (-x, y) \rightarrow (2+x, y)$$

$$(x, y) \rightarrow (2-x, y) \rightarrow (x-2, y)$$

costruzioni analoghe valgono per $n=3$

Sia P punto, $\pi: P \mapsto P$, consideriamo
le immagini di π come le funzioni

$$\varphi: P \rightarrow P + 2\vec{PM} \text{ con } M \text{ proiezione}$$

ortogonale di P su π .

$n=2$ in $EG_2(\mathbb{R})$

luogo dei punti a distanza d da un punto C assegnato.

$$C = (x_c, y_c)$$

$$d(x, c)^2 = d^2$$

$$\left[(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = d^2 \right]$$

$$\underbrace{x^2 - 2xx_c + y^2 - 2yy_c + x_c^2 + y_c^2 - d^2}_{S} = 0$$

polinomio di II grado in cui i coeff. di x^2 e y^2 sono uguali

S è tale che

$$\left[\frac{\text{coeff di } x}{2} \right]^2 - \left[\frac{\text{coeff di } y}{2} \right]^2 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 13y + 8 = 0$$

$$\cos \quad S - \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 < 0 \quad \text{and}$$

$$S < \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2$$